Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

Ecole des Hautes Etudes Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1981

Composition de Mathématiques

2e EPREUVE

Samedi 16 Mai 1981, de 8 heures à midi

PREMIÈRE PARTIE

A tout a réel, on associe f_a, fonction réelle d'une variable réelle définie par : $f_a(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-a}}$.
Soit $\mathscr{C}_a$ la courbe représentative de f_a.

1° Indiquer pour quelles valeurs de x, $f_a(x)$ est défini ?

2° Dresser, en fonction de a, les différents tableaux de variation de f_a.

3° Etudier les branches infinies de $\mathscr{C}_a$.

4° Rechercher les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_a$.

5° Trouver la courbe Γ décrite par le point à tangente horizontale de $\mathscr{C}_a$ lorsque a varie.

6° Construire sur un même graphique, avec des échelles appropriées (non nécessairement les mêmes sur les axes o x et o y), les courbes Γ, $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

DEUXIÈME PARTIE

On considère la fonction g_a, fonction réelle d'une variable réelle définie par : $g_a(x) = \frac{x^2}{\sqrt{|x-a|}}$.
Soit $\mathscr{D}_a$ la courbe représentative de g_a.

1° Reprendre, pour la famille des courbes $\mathscr{D}_a$, les questions 1° 2° 3° 4° de la 1re partie.
Construire sur un même graphique les courbes $\mathscr{D}_{-1}$, $\mathscr{D}_0$, $\mathscr{D}_1$.

2° Déterminer le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{D}_1$ et de la droite d'équation $y = \lambda$. Donner une valeur approchée, à 10^{-1} près par défaut, des abscisses des points de $\mathscr{D}_1$ d'ordonnées $\lambda = 1$ et $\lambda = 4$ respectivement.

TROISIÈME PARTIE

1° Démontrer que, pour tout $x > a$, l'intégrale $\int_a^x f_a(t)dt$ converge. Démontrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f_a(t)dt$ diverge.

2° Déterminer deux réels α et β tels que

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x-a}} - \sqrt{x}\ (\alpha x + \beta) \right] = 0.$$

Quelle est la nature de l'intégrale $\int_A^{+\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x-a}} - \sqrt{x}\ (\alpha x + \beta) \right] dx$, où A est un réel strictement supérieur à a et à 0 ?

3° Déterminer un réel γ tel que l'intégrale $\int_A^{+\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x-a}} - \sqrt{x}\ (\alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x}) \right] dx$ soit convergente.

4° Calculer $I_n = \int_a^n \frac{x^2}{\sqrt{x-a}}\, dx$, pour n entier strictement supérieur au paramètre a.

5° Soit $S_n = \sum_{k=N+1}^{n} \frac{k^2}{\sqrt{k-a}}$ où N est un entier strictement plus grand que $\left| \frac{4a}{3} \right|$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$. Etablir la double inégalité :

$$I_{n+1} - I_{N+1} \geqslant S_n \geqslant I_n - I_N.$$

En déduire un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$.

6° On pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, et $u_k = \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$.

Montrer que la série de terme général u_k est convergente.

Calculer $\sum_{k=1}^{n} u_k$ et en déduire que T_n est équivalent à $2\sqrt{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

7° On pose $V_n = \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}$ et $W_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

En utilisant la définition des intégrales $\int_0^1 x\sqrt{x}\, dx$ et $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$ par les sommes de Riemann, trouver

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{V_n}{n^{5/2}} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{W_n}{n^{3/2}}.$$

8° Retrouver, à l'aide des questions 3° 6° 7° de la 3me partie, un équivalent simple de S_n quand n tend vers $+\infty$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail